



Серия №33. Неравенство Гёльдера

19 июля

В неравенстве средних можно использовать переменные несколько раз (и мы так делали), например, $\frac{x+x+y}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y}$. В общем виде это называется неравенством средних с весами.

Неравенство средних с весами. Пусть $x_i > 0$, а p_i – натуральные числа. Тогда

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \geq x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Неравенство верно и для произвольных положительных p_i (но доказывать не будем).

1. а) Докажите неравенство для положительных рациональных чисел λ_i , сумма которых равна 1, и для положительных x_i :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

б) Докажите, что смысл неравенства не меняется при домножении всех x_i на одно и то же положительное число.

в) Пусть даны n наборов положительных чисел a_i, b_i, \dots, z_i и набор положительных рациональных чисел λ , при этом:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= 1, \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n &= 1, \\ &\dots \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n &= 1, \\ \lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z &= 1. \end{aligned}$$

Докажите, что тогда

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_a a_i + \lambda_b b_i + \dots + \lambda_z z_i}{\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z} \right)^{\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z} = 1.$$

г) Докажите для тех же наборов ещё одно неравенство:

$$(a_1 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + \dots + z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + \dots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}$$

д) **Неравенство Гёльдера.** Пусть даны n наборов положительных чисел a_i, b_i, \dots, z_i и набор положительных рациональных чисел λ , причём $\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z = 1$. Тогда выполнено неравенство:

$$(a_1 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + \dots + z_n)^{\lambda_z} \geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + \dots + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}$$

Равенство достигается при условии пропорциональности наборов, т.е. если

$$a_1 : a_2 : \dots : a_n \equiv b_1 : b_2 : \dots : b_n \equiv \dots \equiv z_1 : z_2 : \dots : z_n.$$

2. Докажите неравенство КБШ с помощью неравенства Гёльдера. А именно: для положительных чисел a_i, b_i выполнено

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Частный случай неравенства Гёльдера для 3 наборов в удобном виде:

$$(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)(c_1 + \dots + c_n) \geq \left(\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \right)^3.$$

Задачи

Все переменные в задачах считать положительными.

3. Докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

4. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a+c)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

5. Докажите неравенство:

$$\frac{a^6}{b^2+c^2} + \frac{b^6}{c^2+a^2} + \frac{c^6}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2}abc(a+b+c)$$

6. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}$$

7. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

8. Для $xu + yz + zx = 1$ докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{1+9y^2xz} + \frac{y^3}{1+9z^2xy} + \frac{z^3}{1+9x^2yz} \geq \frac{(x+y+z)^3}{18}$$